# INTÉGRATION

**Exercice 1.** Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \int_2^{2x} \ln t\, dt \qquad g : x \mapsto \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt \qquad h : x \mapsto \int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt \qquad \varphi : x \mapsto \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\sqrt{x}} \frac{t\,dt}{1+t^4}$$

**Exercice 2.** Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t+i}$.

**Exercice 3.** Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^n}\,dx$

1) Étudier la monotonie de la suite $(u_n)$.
2) En déduire que $(u_n)$ converge.
3) Démontrer :
$$\forall x \in [0,1] \qquad 1-x \leq \sqrt{1-x} \leq 1-\frac{x}{2}$$
4) En déduire un encadrement du terme général $u_n$, puis $\lim u_n$.

**Exercice 4.** Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \dfrac{\operatorname{sh}(t)}{t}$ si $t \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \varphi(t)\,dt$.

1) Montrer que $f$ est bien définie et étudier sa parité.
2) Justifier que $f$ est dérivable et calculer $f'(x)$
3) Dresser le tableau de variation de $f$.

**Exercice 5.** Soit $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| = \int_a^b |f(t)|\,dt \quad \iff \quad f \geq 0 \quad \text{ou} \quad f \leq 0$$

**Exercice 6 (Lemme de Riemann-Lebesgue).** Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

1) Soit $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2) Montrer que le résultat est encore vrai si $f$ est en escalier sur $[a,b]$.
3) En déduire que le résultat est encore vrai si $f$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

**Exercice 7 ($\star$).** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}$. Montrer que $f$ admet un point fixe.

**Exercice 8 (Sommes de Riemann).** Calculer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}$

2) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$

3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

4) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{4}+\cdots+\sqrt[n]{2^n}\right)$

**Exercice 9.** Écrire la formule de Taylor avec reste intégral en $x=0$ pour $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

En déduire la limite de la suite de terme général $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

**Exercice 10.** En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left| \sin x - \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right) \right| \leq \frac{|x|^7}{7!}$$

**Exercice 11** (Calcul d'intégrales)**.** Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_2^5 \frac{dt}{t^2 - t}$

2) $\displaystyle\int_0^1 t^2(t^3+1)^5 dt$

3) $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) dt$

4) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t + \tan t}$

5) $\displaystyle\int_1^8 \frac{dt}{2\sqrt[3]{t} - 1}$

6) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 7} \frac{dt}{1 - 4e^{-2t}}$

7) $\displaystyle\int_1^2 \frac{t+1}{t^2 - t - 6} dt$

8) $\displaystyle\int_{-1}^2 t\,|t|\,dt$

9) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t}{(t^2+t+1)(t^2-t+1)} dt$